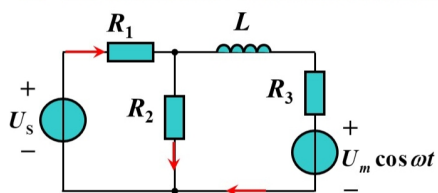


第8章 周期非正弦电路

8.0 周期非正弦电源的产生

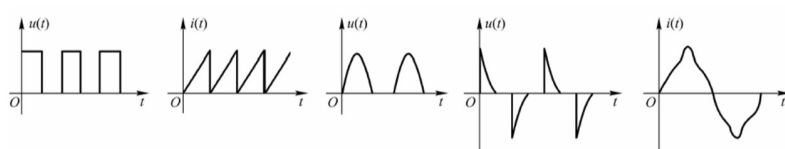
1) 当电路中有多个不同频率的电源同时作用



引起的激励便是周期非正弦电源，解决方法是？

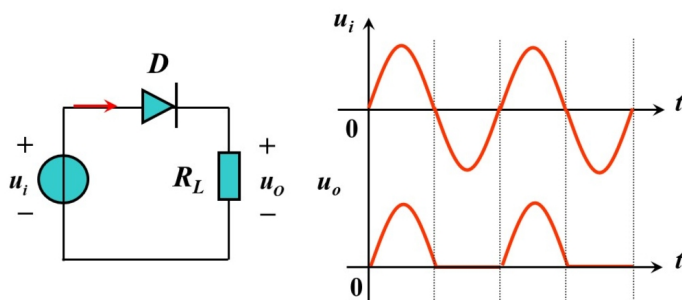
根据叠加定理，分别计算不同频率的响应，然后将瞬时值结果叠加。

2) 周期非正弦电压源或电流源（例如方波、锯齿波）



引起的响应也是周期非正弦量，如何求响应？

3) 有非线性元件引起的周期非正弦电流或电压。例如，由半波整流，全波整流得到的电压，电流



响应也是周期非正弦量，如何求响应？

这些周期非正弦函数首先分解为不同频率的傅里叶级数，然后求解不同频率的正弦激励的响应，最后将瞬时值结果叠加。

周期非正弦电路分析方法：谐波分析法

8.1 周期函数的傅里叶级数展开式

1. 傅里叶级数

周期为 T ，角频率为 ω 的周期函数 $f(t)$ 可表示为

$$f(t) = f(t + kT) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

当其满足狄里赫利条件即：

- 1) $f(t)$ 在任何一个周期内，连续或存在有限个间断点；
- 2) $f(t)$ 在任何一个周期内，只有有限个极大值和极小值；
- 3) 在任何一个周期内，函数绝对值的积分为有界值，

即 $\int_0^T |f(t)| dt$ 存在

$f(t)$ 可以分解为如下的傅里叶级数

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \right]$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt$
 $= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) d(\omega t)$

$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt$
 $= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(k\omega t) d(\omega t)$

$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt$
 $= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(k\omega t) d(\omega t)$

$\omega = 2\pi / T = 2\pi f$
是角频率， T 是 $f(t)$ 的周期。

在电路分析中，一般用傅里叶级数的另一种形式。

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_{km} \cos \phi_k \cos(k\omega t) - A_{km} \sin \phi_k \sin(k\omega t)]$$

$$= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \cos(k\omega t + \phi_k)$$

设 $a_k = A_{km} \cos \phi_k$
 $b_k = -A_{km} \sin \phi_k$

可得

$$\begin{cases} A_0 = \frac{a_0}{2} \\ A_{km} = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \\ \phi_k = \arctan \frac{-b_k}{a_k} \end{cases}$$

$$= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \cos(k\omega t + \phi_k)$$

恒定分量（直流分量）

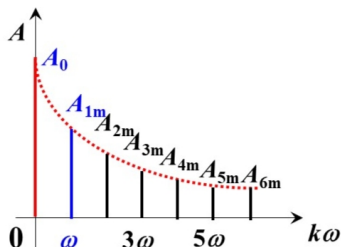
$k=1$ —— 基波； A_{1m} —— 基波振幅， ϕ_1 —— 基波初相

$k=2, 3, \dots$ 等 —— 分别称为二次，三次谐波，统称为高次谐波

由于傅里叶级数是收敛的，一般谐波次数越高，振幅越小。

• 2. 谐波分析

将周期函数分解为恒定分量、基波分量和各次谐波的方法。

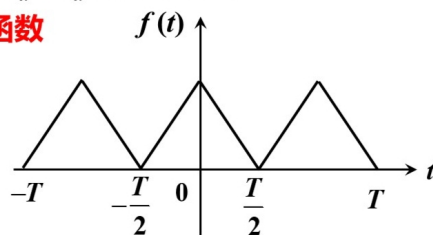


这种谱线间具有一定间隔的频谱称为**离散频谱**。同样可以画出相位频谱，用以表示各次谐波的初相 ϕ_k 随角频率 $k\omega$ 变动的情形。

• 3. 周期函数的波形与傅里叶系数的关系

当周期函数的波形具有某种对称性质时，利用函数对称性可使系数 A_0 、 a_k 、 b_k 的确定简化。

1) $f(t)$ 为偶函数

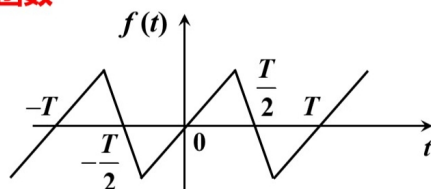


$f(t) = f(-t)$ ，函数对称于纵轴，有

$$a_k \neq 0, b_k = 0$$

所以傅里叶级数中只含余弦项和恒定分量(当 $A_0 \neq 0$ 时)，而没有正弦项，这是因为正弦项都是奇函数。

2) $f(t)$ 为奇函数

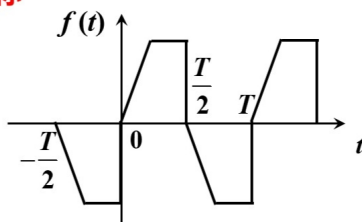


$f(-t) = -f(t)$ ，函数对称于原点，有

$$A_0 = 0, a_k = 0, b_k \neq 0$$

只含有正弦项，不含恒定分量和余弦项，因为恒定分量和余弦项都是偶函数。

3) $f(t)$ 为镜像对称



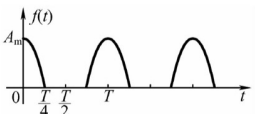
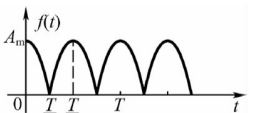
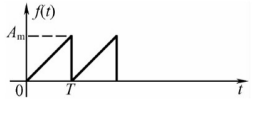
$f(t) = -f(t + T/2)$ ，函数移动半个周期的波形与原波形对称于横轴，有

$$A_0 = 0, a_{2k} = 0, b_{2k} = 0$$

展开式中只有奇次谐波。计算奇次谐波系数，只需计算半个周期内积分。

$$a_n = \begin{cases} 0 & n = 2, 4, 6 \dots \\ \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos k\omega t dt & n = 1, 3, 5 \dots \end{cases} \quad \left| \quad b_n = \begin{cases} 0 & n = 2, 4, 6 \dots \\ \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin k\omega t dt & n = 1, 3, 5 \dots \end{cases}$$

下面是几种常见周期函数的傅里叶级数

$f(t)$ 的波形图	$f(t)$ 的傅里叶级数
	$f(t) = \frac{2A_m}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \cos \omega t + \frac{1}{1 \times 3} \cos 2\omega t - \frac{1}{3 \times 5} \cos 4\omega t + \dots \right)$
	$f(t) = \frac{4A_m}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1 \times 3} \cos 2\omega t - \frac{1}{3 \times 5} \cos 4\omega t + \frac{1}{5 \times 7} \cos 6\omega t - \dots \right)$
	$f(t) = A_m \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \dots \right) \right]$

8.2 周期性非正弦电压和电流的有效值、平均功率

1. 有效值

有效值：周期量的有效值等于其瞬时值的方均根值，即

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt}$$

1) 对周期性非正弦电流

令
$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \cos(k\omega t + \phi_{ik})$$

则
$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \cos(k\omega t + \phi_k)]^2 dt}$$

$$i^2 = [I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \cos(k\omega t + \phi_{ik})]^2 \quad i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \cos(k\omega t + \phi_{ik})$$

$$= I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} 2I_0 I_{km} \cos(k\omega t + \phi_{ik}) + \left[\sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \cos(k\omega t + \phi_{ik}) \right]^2$$

$$= I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} 2I_0 I_{km} \cos(k\omega t + \phi_{ik}) + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km}^2 \cos^2(k\omega t + \phi_{ik})$$

$$+ \sum_{\substack{k=1 \\ n=1 \\ k \neq n}}^{\infty} 2I_{km} I_{nm} \cos(k\omega t + \phi_{ik}) \cos(n\omega t + \phi_{in})$$

根据
$$\frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 dt = I_0^2 ;$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} I_{km}^2 \cos^2(k\omega t + \phi_{ik}) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} I_{km}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} I_k^2$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T I_0 \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \cos(k\omega t + \phi_{ik}) dt = 0$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sum_{\substack{k=1 \\ n=1 \\ k \neq n}}^{\infty} 2I_{km} I_{nm} \cos(k\omega t + \phi_{ik}) \cos(n\omega t + \phi_{in}) dt = 0$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 dt = I_0^2$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} I_{km}^2 \cos^2(k\omega t + \phi_{ik}) dt = \sum_{k=1}^{\infty} I_k^2$$

可得

$$I = \sqrt{I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k^2} = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I_k^2}$$

式中 $I_1 = I_{1m} / \sqrt{2}$, $I_2 = I_{2m} / \sqrt{2}$... 别称为基波、二次谐波...的有效值。

2) 对周期性非正弦电压

$$U = \sqrt{U_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k^2} = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2}$$

这表明任意周期量的有效值等于它的恒定分量、基波分量与各谐波分量有效值的平方和的平方根，与各次谐波初相无关。

2. 平均功率

设一端口网络的端口电压、电流取关联参考方向，则其输入的瞬时功率为 $p = u i$

其平均功率就是瞬时功率在一周期内的平均值，即

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt$$

$$\text{设 } u = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{km} \cos(k\omega t + \phi_{uk}), \quad i = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_{nm} \cos(n\omega t + \phi_{in})$$

则有

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = \frac{1}{T} \int_0^T [U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{km} \cos(k\omega t + \phi_{uk})][I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_{nm} \cos(n\omega t + \phi_{in})] dt \\ P &= \frac{1}{T} \int_0^T [U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{km} \cos(k\omega t + \phi_{uk})][I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_{nm} \cos(n\omega t + \phi_{in})] dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_0 dt + \frac{1}{T} \int_0^T U_0 \sum_{n=1}^{\infty} I_{nm} \cos(n\omega t + \phi_{in}) dt + \frac{1}{T} \int_0^T I_0 \sum_{k=1}^{\infty} U_{km} \cos(k\omega t + \phi_{uk}) dt \\ &\quad + \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{\substack{k=1 \\ n=1 \\ k \neq n}}^{\infty} U_{km} I_{nm} \cos(k\omega t + \phi_{uk}) \cos(n\omega t + \phi_{in}) dt \\ &\quad + \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=n=1}^{\infty} U_{km} I_{km} \cos(k\omega t + \phi_{uk}) \cos(k\omega t + \phi_{ik}) dt \\ &= U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_{km}}{\sqrt{2}} \frac{I_{km}}{\sqrt{2}} \cos \varphi_k = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k = P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k \end{aligned}$$

周期非正弦电路的平均功率等于恒定分量、基波分量和各次谐波分量分别产生的平均功率之和。

同时说明：不同频率的电压和电流不产生平均功率。

8.3 周期非正弦电路分析

- 线性电路在周期非正弦激励时的稳态分析步骤：

- 1) 把给定的周期性非正弦激励分解为恒定分量和各谐波分量。
 - 2) 分别计算电路在上述恒定分量和各谐波分量单独作用下的响应。求恒定分量响应要用**计算直流电路的方法**；求各次谐波分量的响应，则要应用**计算正弦电流电路的方法（相量法）**。
- 其中，电感、电容对 k 次谐波的电抗分别为

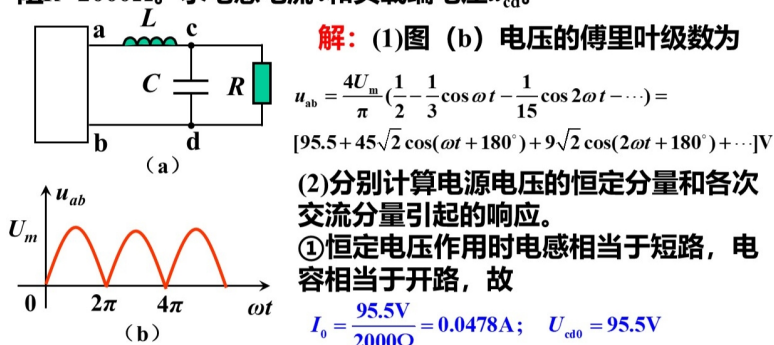
$$X_{Lk} = k\omega L = kX_{L1} \quad X_{L1} \text{为基波感抗}$$

$$X_{Ck} = \frac{1}{k\omega C} = \frac{1}{k} X_{C1} \quad X_{C1} \text{为基波容抗}$$

- 3) 根据叠加定理，把恒定分量和各谐波分量的响应相量转化为**瞬时表达式**后进行叠加。

例题

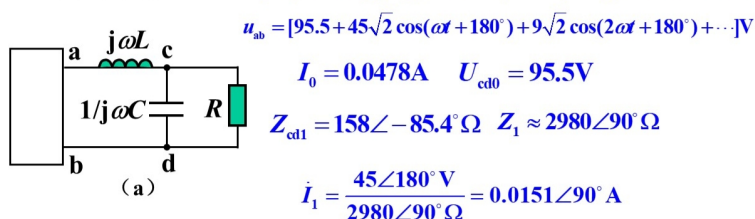
图(a)中 LC 构成滤波电路，其中 $L=5\text{H}$ ， $C=10\mu\text{F}$ 。设输入为100Hz正弦经全波整流电压，如图(b)所示，电压振幅 $U_m=150\text{V}$ ，负载电阻 $R=2000\Omega$ 。求电感电流 i 和负载端电压 u_{cd} 。



② 电压基波作用。此时基波角频率应为 $\omega = 2 \times 100\pi \text{ rad/s}$

$$RC \text{ 并联电路的阻抗为 } Z_{cd1} = \frac{R/(j\omega C)}{R + 1/(j\omega C)} = \frac{R}{1 + j\omega CR} = \frac{2000\Omega}{1 + j4\pi} = 158\angle -85.4^\circ \Omega$$

ab端口的输入阻抗 $Z_1 = j\omega L + Z_{cd1} = [j1000\pi + (12.6 - j158)]\Omega \approx 2980\angle 90^\circ \Omega$



$$\dot{U}_{cd1} = Z_{cd1} \dot{I}_1 = 158\angle -85.4^\circ \Omega \times 0.0151\angle 90^\circ \text{A} = 2.39\angle 4.6^\circ \text{V}$$

③ 二次谐波的作用角频率加倍

$$Z_{cd2} = \frac{R}{1 + j2\omega RC} = \frac{2000\Omega}{1 + j8\pi} \approx 79\angle -87.7^\circ \Omega$$

$$Z_2 = j2\omega L + Z_{cd2} = j2000\pi + 79\angle -87.7^\circ \approx 6280\angle 90^\circ \Omega$$

$$\dot{I}_2 = \frac{9\angle 180^\circ \text{V}}{6280\angle 90^\circ \Omega} = 0.00143\angle 90^\circ \text{A}$$

$$\dot{U}_{cd2} = Z_{cd2} \dot{I}_2 = 79\angle -87.7^\circ \times 0.00143\angle 90^\circ = 0.113\angle 2.3^\circ \text{V}$$

可见负载电压中二次谐波有效值仅占恒定电压的 $0.113/95.5=0.12\%$ 的, 所以不必计算更高次谐波的影响。

(3) 把相量变化为瞬时表达式叠加。

$$i = I_0 + i_1 + i_2 =$$

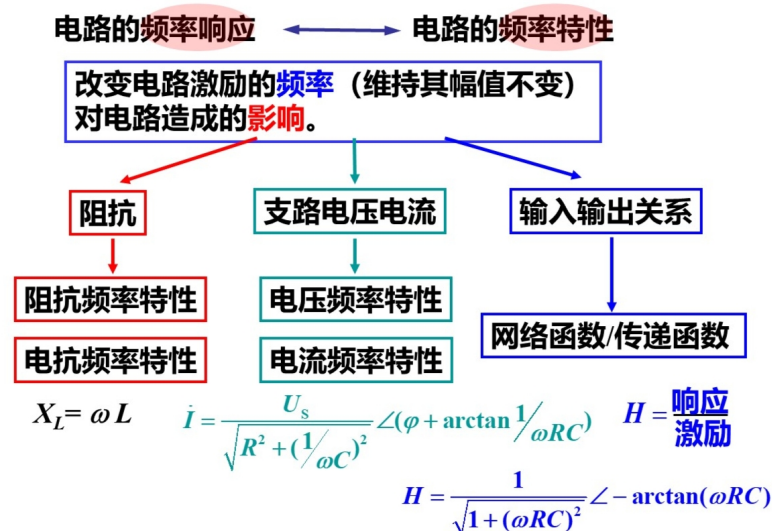
$$[47.8 + 15.1 \times \sqrt{2} \cos(\omega t + 90^\circ) + 1.43 \times \sqrt{2} \cos(2\omega t + 90^\circ)] \text{mA}$$

$$u_{cd} = U_{cd0} + u_{cd1} + u_{cd2} =$$

$$[95.5 + 2.39 \times \sqrt{2} \cos(\omega t + 4.6^\circ) + 0.113 \times \sqrt{2} \cos(2\omega t + 2.3^\circ)] \text{V}$$

说明:负载电压 u_{cd} 中最大的谐波, 即基波有效值仅占恒定分量的2.5%, 表明这个LC电路具有滤除各谐波分量作用→**滤波电路或滤波器**。电感L起抑制高频交流的作用→**扼流圈**。并联电容C起减小负载电阻上交流电压的作用→**旁路电容**。

• 频率响应与频率特性的关系



• 8.4 滤波电路的概念

• 1. 网络函数

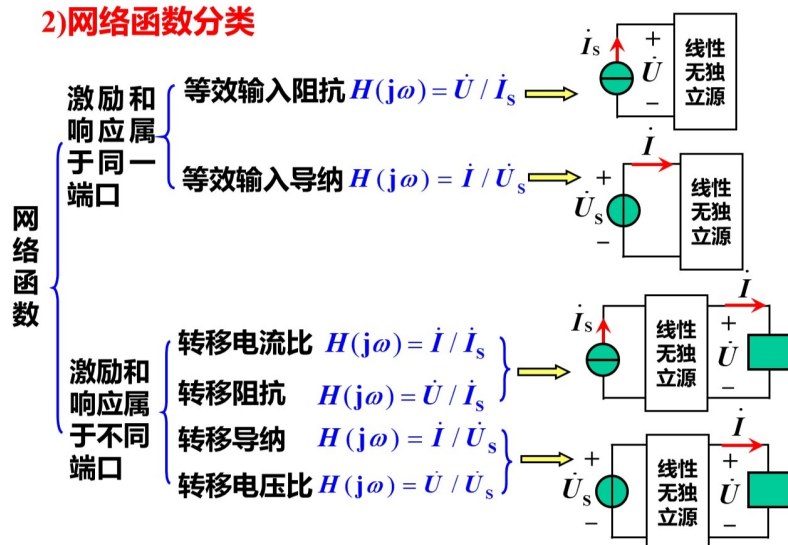
1) 网络函数与网络的频率特性

网络的响应相量与激励相量之比是角频率 ω 的函数, 统称为**网络函数**, 定义式为

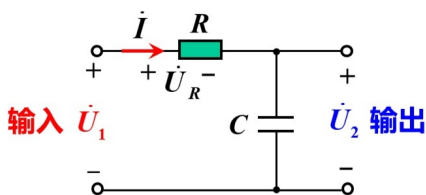
$$H(j\omega) = \frac{\text{响应相量}}{\text{激励相量}} = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

$|H(j\omega)|$ —— 随 ω 的变化规律称为网络的幅频特性。
 $\varphi(\omega)$ —— 随 ω 的变化规律称为网络的相频特性。 } **网络的频率特性**

2) 网络函数分类



例1 在图示 RC 电路中, 若以电容电压为输出响应, 以输入一个电压 \dot{U}_1 为激励, 求其网络函数及其频率特性。



$$H(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$$= |H(j\omega)| \angle \varphi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \angle -\arctan(\omega RC)$$

由此可得

网络函数的模 $|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$ \Rightarrow 幅频特性

网络函数的辐角 $\varphi(\omega) = -\arctan(\omega RC)$ \Rightarrow 相频特性

频率特性

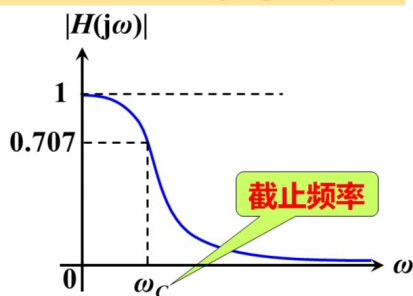
$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad \varphi(\omega) = -\arctan(\omega RC)$$

式中 RC 之积具有时间的量纲, 其倒数具有频率的量纲, 可设

$$\omega_c = 1/RC$$

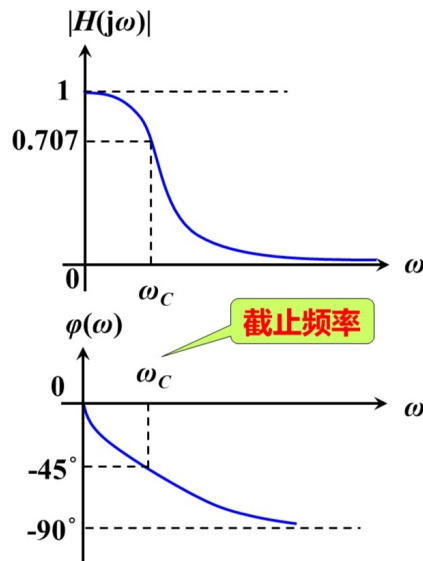
称其为 RC 电路的固有频率或自然频率(natural frequency)。

$\omega / (\text{rad/s})$	$ H $	$\varphi (^{\circ})$
0	1	0
ω_c	0.707	-45
$2\omega_c$	0.447	-63.4
$10\omega_c$	0.1	-84.3
$20\omega_c$	0.05	-87.1
$100\omega_c$	0.01	-89.4

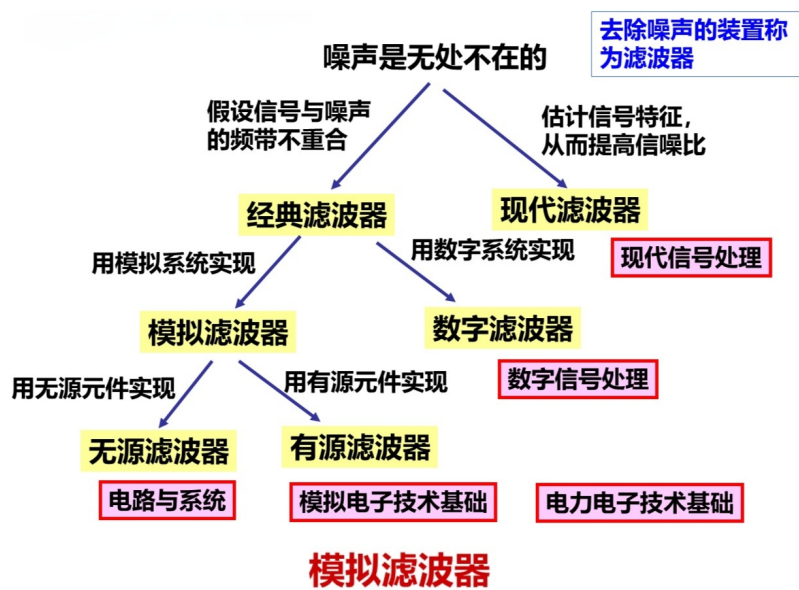


将网络函数的模下降到最大值的0.707倍时所对应的频率称为截止频率(out-off frequency)。

$\omega /(\text{rad/s})$	$ H $	$\varphi (^{\circ})$
0	1	0
ω_c	0.707	-45
$2\omega_c$	0.447	-63.4
$10\omega_c$	0.1	-84.3
$20\omega_c$	0.05	-87.1
$100\omega_c$	0.01	-89.4



2. 滤波器 (Filter)



从功能上分类

低通(LP) 高通(HP) 带通(BP) 带阻(BS, Notch) 全通(FP)

从实现方式上分类



